1057

AHMEDBABA/HAFEDH

FONCTIONS

ERRAJA 7C N: 1057

Ex: 1

- Soit f la fonction de variable réelle definie par: $\to f(x)$

$$f(x)=\frac{x+x^2+\dots+x^{2015}-2015}{x+1}$$

* Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^K-1}{x-1}$, $(K\in\mathbb{N}^*)$

en deduire $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Solution

* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^K-1}{x-1}$ (F.I) $\Rightarrow$ on pose $g(x)=x^K$

Alors $g(1)=1$

et $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=Kx^{K-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^K-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$$

$$=K\times 1^{K-1}=K\times 1=K$$

Donc: $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^K-1}{x-1}=K}$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{x+x^2+\dots+x^{2015}-2015}^{=0}}{\underbrace{x-1}_{=0}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\dots+x^{2015}}{x-1}=\lim\frac{x+x^2+\dots+x^{2015}-\overbrace{(1+1+\dots+1)}^{2015\text{ fois}}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\dots+(x^{2015}-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}+\dots+\frac{x^{2015}-1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\sum_{K=1}^{2015}\frac{x^K-1}{x-1}=\sum_{K=1}^{2015}\lim_{x\to 1}\frac{x^K-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{2015}K=1+2+\dots+2015$$

somme des 2015 premieres termes d'un S.A de raison 1 et de premieres termes 1.

Donc:

$$\sum_{K=1}^{2015}K=\frac{2015}{2}(1+2015)$$

$$=\frac{2015\times 2016}{2}=2015\times 1008$$

$$\Rightarrow \boxed{2031120}$$

Donc:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=2031120}$$

Ex: ② FONCTIONS

Soit f et g les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\cos x$ et $g(x) = 1 + \sqrt{3}\cos x - \sin x$.
(C) et (C') leurs courbes représentatives respectives, dans le même repère orthonormé.

1) Etudier les variations de f et construire (C).

2) Démontrer que (C') est l'image de (C) par une transformation simple que l'on caractérisera.

3) Construire (C').

Solution

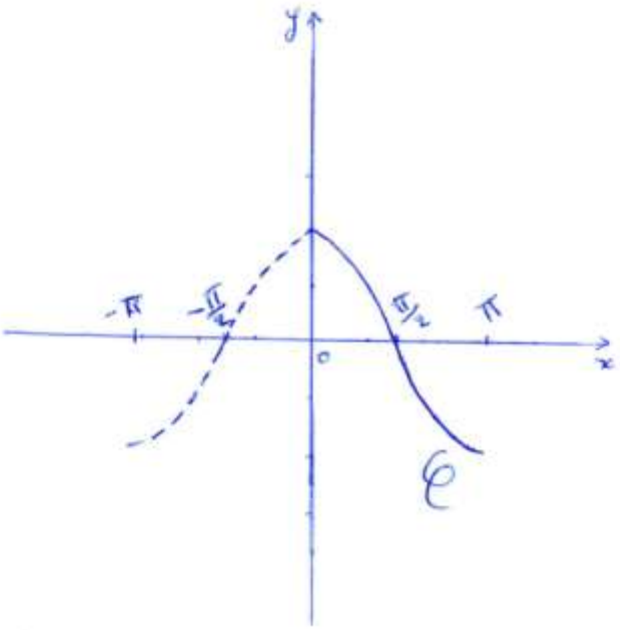
1) • $D_f = \mathbb{R}$

• f est périodique de période 2π et est paire il suffit de l'étudier en une démi-période $I = [0, \pi]$

• $f'(x) = -2\sin x < 0 \quad \forall x \in I$.

.T.V :

x	0	$\pi/2$	π
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	0	-2



2) $g(x) = 1 + \sqrt{3}\cos x - \sin x$

$= 1 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$

$= 1 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\downarrow t_{\vec{u}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \downarrow t_{\vec{u}}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{6}\\0\end{pmatrix}$

• $g(x) = 1 + f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$g(x) = t_{\vec{u}}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{6}\\1\end{pmatrix}(f(x))$

• $g(x) - 1 = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

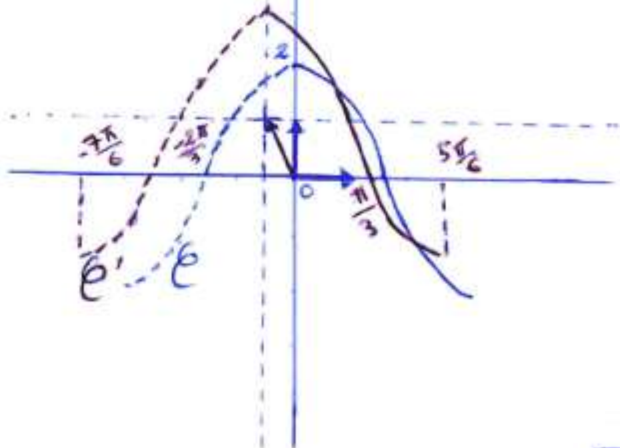
$y - 1 = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$Y = f(X)$

$Y = y - 1 \Longrightarrow y = Y + 1$

$X = x + \frac{\pi}{6} \Longrightarrow x = X - \frac{\pi}{6}$

3) $\left\{ \cdot f(x) = \frac{-3x+1}{-2x-4} \right.$



EX: 3 FONCTIONS

Soit f la fonction Définie par : $f(x)=x^4-\frac{4}{x}$
• Démontrer que L'equation $f(x)=\sin x$ admet une Solution dans l'intervalle $[1,2]$

Solution

* $f(x)=x^4-\frac{4}{x}$; $I=[1,2]$
L'equation $f(x)=\sin x$ (E)
equivant à $f(x)-\sin x=0$
on pose $g(x)=f(x)-\sin x$
Donc (E) $\Longleftrightarrow g(x)=0$
on a :
* g est continue Sur $[1,2]$
Car Somme de fonction continue sur $[1,2]$:
$(x \longmapsto x^4-\frac{4}{x})$
$(x \longmapsto -\sin x)$
* $g(1)=f(1)-\sin 1=-3-\sin 1$
$g(1)<0$:
* $g(2)=f(2)-\sin 2=14-\sin 2$
$g(2)>0 \Longrightarrow \boxed{g(1).g(2)\leqslant 0}$
Alors L'equation $g(x)=0$ admet au moins une solution
$\alpha\in[1,2]$ α est une Solution.
de (E) on $E \Longleftrightarrow g(x)=0$

Ex : 4 FONCTIONS

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2x+1}{2x-4}$ et (C) sa Courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudier les variations de f et Construire (C).

2) on Considère l'homothétie h de Centre $\Omega(2;1)$ et de rapport K telque $K\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$. Trouver une équation cartesienne de (C_K) image de (C) par h. Construire (C) et (C_2) dans le même repère.

Solution

1) Etudier de f :

• $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$; f n'est ni paire ni impaire

- il faut l'étudier sur $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$; $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\frac{5}{0^-}=-\infty$

• $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

• $f'(x)=\frac{-10}{(2x-4)^2}<0 \Longrightarrow f\searrow$

T.V

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 1$

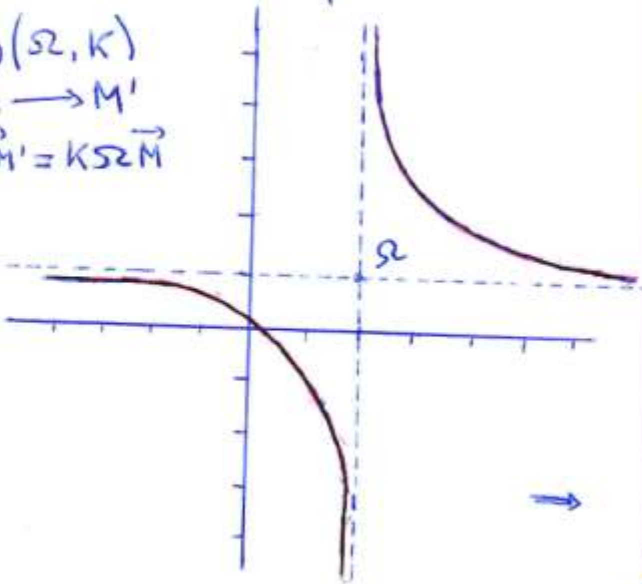
* $f(x)=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$;

; $f(0)=\frac{-1}{4}$

$h(\Omega,K)$

$M\longrightarrow M'$

$\overrightarrow{\Omega M'}=K\overrightarrow{\Omega M}$



2)

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x'-2\\y'-1\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}x'=Kx-2K+2\\y'=Ky-K+1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{x'+2x-2}{K}\\y=\frac{y'+K-1}{K}\end{cases}$

$\boxed{y=f(x)}$

$\Rightarrow \frac{2\left(\frac{x'+2K-2}{K}\right)+1}{2\left(\frac{x+2x-2}{K}\right)-4}$

$=\frac{\frac{2x'+4K-4}{K}+1}{\frac{2x'+4K-4}{K}-4}$

$=\frac{2x'+4K-4+K}{2x'+4K-4-4K}=\frac{2x'+5K-4}{2x-4}$

$\Longrightarrow \boxed{y=\frac{2x+K-4}{2x-4}}$

$\Rightarrow y'=Ky-K+1=K\left(\frac{2x+5K-4}{2x-4}\right)-K+1$

$\Rightarrow \frac{2Kx+5K^2-4x}{2x-4}-K+1$

$=\frac{2Kx+5K^2-4K-2Kx+4K+2x-4}{2x-4}$

$=\frac{2x+5K^2-4}{2x-4} \Longrightarrow \boxed{g(x)=\frac{2x+5K^2-4}{2x-4}}$

$g_2(x)=\frac{2x+16}{2x-4}$ $(K=2)$

Exs ⑤ FONCTIONS

Soit F la Fonction de variable réele définie Sur $[0,\pi]$ par : $f(x)=\cos x$.

1) Démontrer que f realise une bijection de $[0,\pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Construire dans le m repére orthonormé, tes Courbes représentatives de F et de F^{-1}.

3) Montrer que F^{-1} est dérivable Sur $]-1,1[$ et calculer sa derivée.

4) Démontrer que $F^{-1}(x)+F^{-1}(-x)=\pi$ pour tout x de J. Interpréter graphiquement

Solution

1) - $* f(x)=\cos x$, $I=[0,\pi]$

f est derivable sur I

$* f'(x)=-\sin x \leqslant 0$, $\forall x \in I$

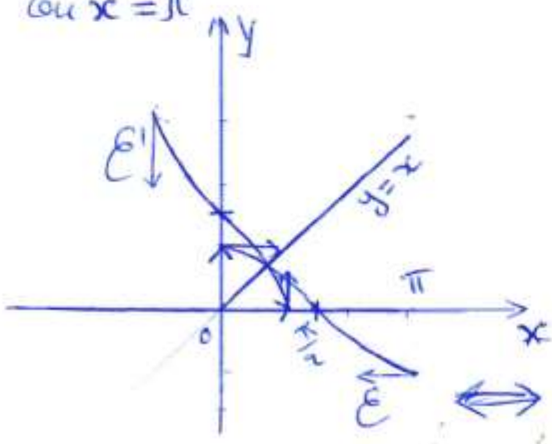
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	0	-1

on a : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [0,\pi] \\ f \text{ est strict decroissante sur } I \\ f([0,\pi])=[-1,1] \end{cases}$

Alors $f:[0;\pi] \longrightarrow [-1,1]$ est bijective

2) - Les Courbes de f et f' Sont Symetrique par rapport à la droite d'équation $y=x$

$f'(x)=0 \Longleftrightarrow \sin x=0 \Longleftrightarrow x=0$ ou $x=\pi$



$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}'$
$(0;1)$	$(0;1)$
$(\frac{\pi}{2};0)$	$(0;\frac{\pi}{2})$
$(\pi;-1)$	$(-1;\pi)$

3) on a :

$\begin{cases} \boxed{1}\ f:]0,\pi[\longrightarrow]-1,1[\text{ est tanjente} \\ \boxed{2}\ f \text{ est derivable sur }]0,\pi[\\ \boxed{3}\ \forall x \in]0,\pi[,\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$

- Alors f^{-1} est derivable Sur $]-1,1[$

pour calculer $(f^{-1})'(x)$ on a :

$f'(x)=-\sin x=-\sqrt{\sin^2 x}$ car $\sin x>0$ sur $]0;\pi[$

- $f'(x)=-\sqrt{1-\cos^2 x}$ car $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

- $f'(x)=-\sqrt{1-(f(x))^2}$

Car $\cos x=f(x)$

on a : $f'(f^{-1}(x))=-\sqrt{1-(f(f^{-1}(x)))^2}$

$f'(f^{-1}(x))=-\sqrt{1-x^2}$

$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ Enfin

$\longrightarrow \boxed{(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in]-1;1[}$